POSTULADOS DE HILBERT PARA LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA PLANA.

http://132.248.17.238/geometria/t_3_001/t_3_001_1n_m.html

Términos primitivos

punto, recta, entre, congruente

Grupo I: Postulados de conexión.

I-1. *Hay una y sólo una recta que pasa por dos puntos distintos dados*
I-2. *Toda recta contiene al menos dos puntos distintos, y respecto a una recta hay al menos un punto que no está en ella.*

Grupo II: Postulados de orden.

II-1. *Si el punto* **C** *está entre los puntos* **A** y **B**, *entonces* **A**, **B** y **C** *están todos sobre la misma recta, y* **C** *está entre* **B** *y* **A**, *y* **B** *no está entre* **C** *y* **A**, *y* **A** *no está entre* **C** *y* **B**.
II-2. *Respecto a dos puntos distintos cualesquiera,* **A** *y* **B** *hay siempre un punto* **C** *que está entre* **A** *y* **B**, *y un punto* **D** *que es tal que* **B** *está entre* **A** y **D**.
II-3. *Si* **A**, **B** *y* **C** *son tres puntos distintos sobre la misma recta, entonces uno de esos puntos está entre los otros dos.*
Definiciones. Por el segmento **AB** se indican los puntos **A** y **B** y todos los que están entre **A** y **B**. Los puntos **A** y **B** se llaman *puntos extremos* del segmento. Un punto **C** se dice que está *sobre* el segmento **AB** si es **A** o **B** o algún punto entre **A** y **B**.
Definición. Dos rectas, una recta y un segmento, o dos segmentos, se dice que se *cortan* si hay un punto que está en ambos.
Definiciones. Sean **A**, **B**, **C** tres puntos que no están sobre la misma recta. Entonces por el triángulo **ABC** se indican los tres segmentos **AB**, **BC**, **CA**. Los segmentos **AB**, **BC**, **CA** se llaman *lados* del triángulo, y los puntos **A**, **B**, **C**, *vértices* del mismo.
II-4. (Postulado de Pasch). *Una recta que corte a un lado del triángulo pero que no pase por ninguno de sus vértices deberá cortar también al otro lado del triángulo.*

Grupo III: Postulados de congruencia.

III-1. *Si* **A** y **B** *son puntos distintos y si* **A´** *es un punto que está sobre una recta* m, *entonces hay dos y sólo dos puntos distintos,* **B´** *y* **B´´**, *sobre* m *tales que el par de puntos* **A´**, **B´** *es congruente al par A, B y el par de puntos* **A´**, **B´´** *es congruente al par* **A**, **B**; *además* **A´** *está entre* **B´** *y* **B´´**.
III-2. *Si dos pares de puntos son congruentes al mismo par de puntos, entonces son congruentes entre sí.*
III-3. *Si el punto* **C** *está entre los puntos* **A** *y* **B** *y el* **C´** *está entre* **A´** *y* **B´**, *y si el par de puntos* **A**, **C** *es congruente al par* **A´**, **C´**, *y el par de puntos* **C**, **B** *es congruente al par* **C´**, **B´**, *entonces el par de puntos* **A**, **B** *es congruente al par* **A´**, **B´**.
Definición. Dos segmentos se dice que son congruentes si los puntos extremos de los segmentos son pares congruentes de puntos.
Definiciones. Por el *rayo* **AB** se indica el conjunto de todos los puntos que consisten en aquellos que están entre **A** y **B**, el mismo punto **B** y todos los puntos **C** tales que **B** esté entre **A** y **C**. El rayo **AB** se dice que *emana* del punto **A**.
Teorema. *Si* **B´** *es un punto del rayo* **AB**, *entonces los rayos* **AB´** *y* **AB** *son idénticos.*
Definiciones. Por *ángulo* se indica un punto (llamado *vértice* del ángulo) y dos rayos (llamados los *lados* del ángulo) que emanan del punto. En virtud del teorema anterior, si el vértice del ángulo es el punto **A** y si **B** y **C** son dos puntos cualesquiera distintos de **A** que están sobre los dos lados del ángulo, podemos sin ambigüedad hablar del ángulo **BAC** (o **CAB**).

Definiciones. Si **ABC** es un triángulo, entonces los tres ángulos **BAC**, **CBA**, **ACB** se llaman *ángulos* del triángulo. El ángulo **BAC** se dice que está *comprendido* por los lados **AB** y **AC** del triángulo.
III-4. *Si* **BAC** *es un ángulo cuyos lados no están sobre la misma recta, y si* **A´** *y* **B´** *son dos puntos distintos, entonces hay dos y sólo dos rayos distintos,* **A´C´** *y* **A´C´´** *tales que el ángulo* **B´A´C´** *es congruente al* **BAC** *y el ángulo* **B´A´C´´** *es congruente al* **BAC***; además, si* **D´** *es un punto del rayo* **A´C´** *y* **D´´** *es un punto del rayo* **A´C´´***, entonces el segmento* **D´D´´** *corta a la recta determinada por* **A´** *y* **B´***.*
III-5. *Todo ángulo es congruente consigo mismo.*
III-6. *Si dos lados y el ángulo comprendido de un triángulo son congruentes, respectivamente, a los dos lados y el ángulo comprendido de otro triángulo, entonces cada uno de los ángulos restantes del primer ángulo es congruente al ángulo correspondiente del segundo.*

Grupo IV: Postulado de las paralelas.
IV-1. (Postulado de Playfair). *Por un punto dado* **A** *que no está en una recta* m *pasa a lo más una recta que no corta a* m.

Grupo V: Postulados de continuidad.
V-1. (Postulado de Arquímedes). *Si* **A**, **B**, **C**, **D** *son puntos distintos, entonces hay, sobre el rayo* **AB***, un conjunto finito de puntos distintos,* **A1**, **A2**, **…**, **An** *tal que* 1) *cada uno de los pares* **A**, **A1***;* **A1**, **A2***; …;* **An-1**, **An** *es congruente al par* **C**, **D***; y* 2) **B** *está entre* **A** *y* **An***.*
V-2. (Postulado de Completitud). *Los puntos de una recta constituyen un sistema de puntos tales que no puede asignarse ningún nuevo punto a la recta sin que se viole al menos uno de los nueve postulados* **I-1**, **I-2**, **II-1**, **II-2**, **II-3**, **II-4**, **III-1**, **III-2**, **V-1**.

Grupo V en Alternativa.
Definiciones. Considérese un segmento **AB**. Llamemos a un punto extremo, digamos **A**, el *origen* del segmento y al otro punto, B, el *extremo* del segmento. Dados dos puntos distintos **M** y **N** de **AB**, decimos que **M** precede a **N** (o **N** sigue a **M**) si **M** coincide con el origen **A** o está entre **A** y **N**. Un segmento **AB**, considerado de esta forma, se llama *segmento ordenado*.
V´-1. (Postulado de Dedekind). *Si los puntos de un segmento ordenado de origen en A y extremo B se separan en dos clases de manera que*
1) *cada punto de* **AB** *pertenezca a una y sólo una de las clases,*
2) *los puntos* **A** *y* **B** *pertenezcan a clases distintas* (*que llamaremos, respectivamente, la* primera *clase y la* segunda *clase*)**,**
3) *cada punto de la primera clase precede a cada punto de la segunda, entonces existe un punto* **C** *sobre* **AB** *tal que todo punto de* **AB** *que preceda a* **C** *estará en la primera clase y todo punto de* **AB** *que siga a* **C** *estará en la segunda clase.*

LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES
http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm

POSTULADOS

1. Por dos puntos diferentes sólo se puede trazar una línea recta.
2. Todo segmento rectilíneo se puede prolongar indefinidamente.
3. Con un centro y un radio dado sólo se puede trazar una circunferencia.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Si una recta corta a otras dos formando a un lado ángulos internos, y la suma de estos es menor que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán de ese lado.

   Por un punto exterior a una recta r, se puede trazar una, y sólo una, recta paralela a esa recta r.